11/1/2019

Μιγαδικοί Διανυσματικοί χώροι

$x^2+1=0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες

$\nexists\, \alpha \in \mathbb{R} : \alpha^2+1=0$

Εφεύρεση των ανθρώπων το i <u>φανταστικός</u> αριθμός ο οποίος λύνει το πολυώνυμο $i^2+1=0$ ή $i=\sqrt{-1}$

Το σύνολο των φανταστικών αριθμών είναι το bi με $b \in \mathbb{R}-\{0\}$

Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\alpha + bi$ με $\alpha, b \in \mathbb{R}$

$$bi + b'i = (b+b')i$$

$$c \in \mathbb{R} \quad c(bi) = cbi$$

Το σύνολο των φανταστικών αριθμών με αυτές τις πράξεις και $b \in \mathbb{R}$ γίνεται δ.χ. πάνω από τους πραγματικούς. Αυτός ο δ.χ. έχει διάσταση 1 και βάση το i.

Το σύνολο των μιγαδικών $\alpha + bi$, $\alpha, b \in \mathbb{R}$

$$(\alpha + bi) + (\alpha' + b'i) = (\alpha + \alpha') + (b + b')i$$

$$c \cdot (\alpha + bi) = c \cdot \alpha + c \cdot bi$$

το $\mathbb{C}$ γίνεται δ.χ. πάνω από τους πραγματικούς. Μία βάση αυτού του χώρου είναι η $\{1, i\}$

$$\alpha + bi = \alpha \cdot 1 + b \cdot i$$

Άρα $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

Π.χ. $(3+7i) + (-2-i) = (3-2) + (7-1)i$

$$-(3+7i) = -3 - 7i$$

$$\sqrt{-7} = \sqrt{7 \cdot (-1)} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{7}\, i$$

$$\sqrt{3 \cdot 7} = \sqrt{21} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{7}$$

$$\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-7} = \sqrt{3} \cdot i \sqrt{7} \cdot i = \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot i^2 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot (-1) = -\sqrt{21}$$

$$\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-7} \neq \sqrt{(-3) \cdot (-7)} = \sqrt{21}$$

$i^2=-1$, $i^2 \cdot i = -1i \Rightarrow i^3 = -i$

$i^3 \cdot i = -i \cdot i \Rightarrow$ $i^4 = -i^2 = 1$.

$i^{50} = i^{4\cdot 12+2} = (i^4)^{12} \cdot i^2 = 1 \cdot i^2 = -1$

$i^{49} = i^{4\cdot 12+1} = i$

$(\alpha+b\cdot i)(\alpha'+b'i)$

$(3+7i)(-1+i) = -3+3i-7i+7i^2 = -3-7-4i = -10-4i$

Συζυγής $\overline{\alpha+bi} = \alpha - bi$

$(\alpha+bi)(\overline{\alpha+bi}) = (\alpha+bi)(\alpha-bi) = \alpha^2 - \cancel{\alpha bi} + \cancel{\alpha bi} + b^2 = \alpha^2+b^2$

Μήκος (νόρμα) $\|\alpha+bi\| = \sqrt{(\alpha+bi)\overline{(\alpha+bi)}} = \sqrt{\alpha^2+b^2}$

$(\alpha+bi)(\overline{\alpha+bi}) = \alpha^2+b^2$

$\alpha+bi \neq 0 \Leftrightarrow \alpha^2+b^2>0$

$(\alpha+bi)\dfrac{(\overline{\alpha+bi})}{\alpha^2+b^2} = 1$

$(\alpha+bi)\dfrac{\alpha-bi}{\alpha^2+b^2} = (\alpha+bi)\dfrac{1}{(\alpha^2+b^2)}(\alpha-bi)$

$(\alpha+bi)\left(\dfrac{\alpha}{\alpha^2+b^2} - \dfrac{b}{\alpha^2+b^2}i\right) = 1$

Δηλαδή $(\alpha+bi)^{-1} = \dfrac{\alpha}{\alpha^2+b^2} - \dfrac{b}{\alpha^2+b^2}i$

$$(3-7i)^{-1} = \frac{3}{3^2+(-7)^2} - \frac{(-7)}{3^2+(-7)^2} i = \frac{3}{9+49} + \frac{7}{9+49} i =$$

$$= \frac{3}{58} + \frac{7}{58} i$$

$z, z' \in \mathbb{R}$

$$\frac{z}{z'} = z \cdot (z')^{-1} = (z')^{-1} \cdot z \qquad z' \neq 0$$

$A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ $\exists B^{-1} \Leftrightarrow \det B \neq 0$

$$\frac{A}{B} = A \cdot B^{-1} \neq B^{-1} \cdot A$$

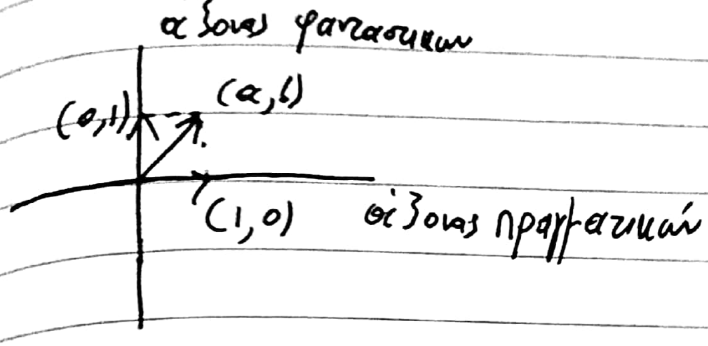
$\frac{z}{z'} = z \cdot (z')^{-1}$ όταν $z' \neq 0$

$\mathbb{C} = \{ a+bi \mid a, b \in \mathbb{R} \}$ δ.χ. διάσταση 2 πάνω από τους πραγματικούς

$\mathbb{R}^2 = \langle (1,0), (0,1) \rangle$

$\mathbb{C} = \langle 1, i \rangle \cong \mathbb{R}^2 = \langle (1,0), (0,1) \rangle$

$$a+bi \mapsto (a,b) = a(1,0) + b(0,1)$$



για το $\mathbb{R}$ έχουμε όλους τους αριθμούς της μορφής $(a,0)$

$z = a+bi \longleftrightarrow (a,b)$

$\|z\| = \sqrt{a^2+b^2}$ μήκος του z

$z \mapsto (\|z\|, \varphi)$, $-\pi < \varphi \leq \pi$ και $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

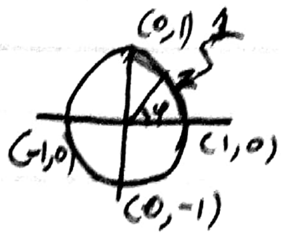
$$z = a+bi = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right) = \|z\| (\cos\varphi + \sin\varphi i)$$

$z = \|z\| (\cos\varphi + \sin\varphi i)$
$z' = \|z'\| (\cos\varphi' + \sin\varphi' i)$

$z \cdot z' = \|z\| \|z'\| (\cos(\varphi+\varphi') + \sin(\varphi+\varphi') i)$

$z^n = \|z\|^n (\cos(n\varphi) + \sin(n\varphi) i)$

$S^1 = \{ z \mid z \in \mathbb{C}, \|z\| = 1 \} \subseteq \mathbb{C}$



S^1 δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{C}$

$z \in S^1 \Rightarrow \|z\| = 1$

$z = \cos\varphi + \sin\varphi i$

$z, z' \in S^1 \Rightarrow z \cdot z'$

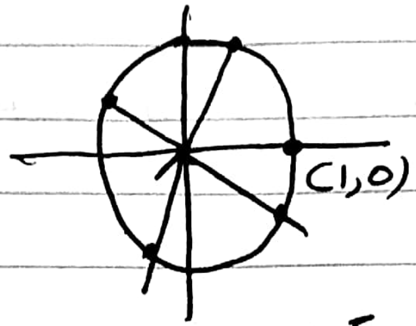
$x^3 - 1 = 0$

$(x-1)(x^2+x+1)$

$x = 1$ $\Delta \Rightarrow$ Δεν έχει πραγματικές

$x^5 - 1 = 0 \rightarrow ||x|| = 1$

Άρα



$x^5 - 10 = 0$ $\left(\frac{x}{\sqrt[5]{10}}\right)^5 - 1 = 0$

$y = \frac{x}{\sqrt[5]{10}}$ $y^5 - 1 = 0$

$\mathbb{C} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^2$ πάνω από τον $\mathbb{R}$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2 = \dim \mathbb{R}^2$

$\mathbb{C} \ni z, z' \Rightarrow zz' \in \mathbb{C}$

$\mathbb{C} = \langle 1 \rangle$ $\quad \underset{z1}{z \in \mathbb{C}}$

$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1.$

$\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C} = \{(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$

$\mathbb{C}^2$ δ.χ. με πράξεις

$(z_1, z_2) + (z_1', z_2') = (z_1 + z_1', z_2 + z_2')$

$c \in \mathbb{R}$ $c \cdot (z_1, z_2) = (c \cdot z_1, c \cdot z_2)$

Δηλ. ο $\mathbb{C}^2$ είναι δ.χ. πάνω από τους πραγματικούς.

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2$

$(z_1, z_2) = (z_1, 0) + (0, z_2) = (a_1 + b_1 i, 0) + (0, a_2 + b_2 i) =$
$= (a_1, 0) + (b_1 i, 0) + (0, a_2) + (0, b_2 i) = a_1 (1, 0) + b_1 (i, 0) +$
$+ a_2 (0, 1) + b_2 (0, i)$

$\{(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i)\}$ γρ. ανεξ. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 4$.

$\mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$

$(z_1, z_2) = (z_1, 0) + (0, z_2)$

Επειδή επιτρέπεται να πολ. με μιγαδικό, δηλαδή ο δ.χ. $\mathbb{C}^2$ θεωρείται πάνω από το $\mathbb{C}$, θα έχουμε
$(z_1, z_2) = z_1 (1, 0) + z_2 (0, 1)$

Τα $(1, 0)$ και $(0, 1)$ είναι επίσης γρ. ανεξ. άρα $\{(1, 0), (0, 1)\}$ αποτελεί βάση του $\mathbb{C}^2$ πάνω από το $\mathbb{C}$
$\dim \mathbb{C}^2 = 2$

Γενικά το σύνολο $\mathbb{C}^n = \{(z_1, \ldots, z_n) \mid z_i \in \mathbb{R}\}$

είναι δ.χ. πάνω από το $\mathbb{C}$ και πάνω από το $\mathbb{R}$. Βάση του $\mathbb{C}^n$ πάνω από το $\mathbb{C}$ $\{(1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,1)\}$

$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$

$(z_1,\dots,z_n) = z_1(1,0,\dots,0) + z_2(0,1,\dots,0) + \dots + z_n(0,0,\dots,1)$

Βάση του $\mathbb{C}^n$ πάνω από το $\mathbb{R}$

$(z_1,z_2,\dots,z_n) = z_1(1,0,\dots,0) + z_2(0,1,\dots,0) + \dots + z_n(0,0,\dots,1)$

$= (a_1+b_1 i, 0, \dots, 0) + \dots + (0,0,\dots,a_n+b_n i) =$
$= (a_1,0,\dots,0) + (b_1 i, 0,\dots,0) + \dots + (0,\dots,0,a_n) + (0,\dots,0,b_n i)$

$= a_1(1,0,\dots,0) + b_1(i,0,\dots,0) + \dots + a_n(0,0,\dots,1) + b_n(0,\dots,i)$

Όπως ορίστηκαν οι δ.χ πάνω από το $\mathbb{R}$ έτσι ορίζονται και οι δ.χ. πάνω από το $\mathbb{C}$ με τις ίδιες ιδιότητες. Προσοχή στη διάσταση.

π.χ. $M(n \times m, \mathbb{R})$ δ.χ. $\dim = n \cdot m$
π.χ. $M(2\times 2, \mathbb{C})$ δ.χ.

$A = \begin{pmatrix} 1+2i & -i \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \in M(2\times 2, \mathbb{C})$

$B = \begin{pmatrix} 1-2i & 0 \\ 2+i & -i \end{pmatrix}$

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 10-i \\ 2+i & 7-i \end{pmatrix}$$

$$A'=\begin{pmatrix} 1+2i & -i \\ 3-\sqrt{2}i & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3-\sqrt{2}i & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$1+2i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\dots+7\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Δηλ. ο A είναι γραμ. συνδ. των πάνω από το $\mathbb{C}$

Βάση του $M(2\times 2, \mathbb{C})$ πάνω από το $\mathbb{C}$

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \to \dim_{\mathbb{C}} M(n\times m, \mathbb{C}) = m\cdot n$$

<u>Προσοχή</u> Αν θεωρήσουμε το σύνολο $M(n\times m, \mathbb{C})$ σαν δ.χ. πάνω από τους πραγματικούς. Τότε $\dim_{\mathbb{R}} M(n\times m, \mathbb{C}) = 2n\times m$

π.χ. $M(2\times 2, \mathbb{C})$ πάνω από το $\mathbb{R}$

$$A'=\begin{pmatrix} 1+2i & -i \\ 3-\sqrt{2}i & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3-\sqrt{2}i & 0 \end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

$$\begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Κάθε ένας από αυτούς θα σπάει σε άθροισμα δύο πινάκων.

Βάση του $M(2\times2, \mathbb{C})$ πάνω από το $\mathbb{R}$

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right\}$$

$\dim_{\mathbb{R}} M(2\times2, \mathbb{C}) = 8$

$M(m\times n, \mathbb{C})$ πάνω από το $\mathbb{C}$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \text{ με } \alpha_{ij} \in \mathbb{C}$$

Ο συζυγής του A

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_{11} & \bar{\alpha}_{1m} \\ \bar{\alpha}_{m1} & \bar{\alpha}_{mn} \end{pmatrix}$$

Ορίζεται ο συζυγής ανάστροφος του A.

$A^* = \bar{A}^t$

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 2-i & 0 & 7 \\ \sqrt{2}-2i & 5-i & -i \end{pmatrix}$ $\bar{A} = \begin{pmatrix} 2+i & 0 & 7 \\ \sqrt{2}+2i & 5+i & i \end{pmatrix}$

$A^* = (\bar{A})^t = \begin{pmatrix} 2+i & \sqrt{2}+2i \\ 0 & 5+i \\ 7 & i \end{pmatrix}$

Ορισμός Αν $A = A^*$ τότε καλείται ερμητιανός

π.χ. $\underset{2\times 3}{A = \begin{pmatrix} 1+i & -i & 0 \\ 2 & 3-2i & i \end{pmatrix}}$ $\underset{3\times 2}{A^*} = \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ i & 3+2i \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

ΟΡΙΣΜΟΣ Ένας πραγματικός πίνακας A καλείται ορθογώνιος αν $AA^t = I_{n\times n}$

Δηλ. για αυτούς τους πίνακες $A^{-1} = A^t$

Ορισμός : Ένας $n\times n$ μιγαδικός πίνακας A καλείται ερμητιανά ορθογώνιος, αν $AA^* = I$

Δηλ. $A^{-1} = A^*$